Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

Кафедра автоматизированных систем управления (АСУ)

Отчет

По дисциплине «Математическая логика и теория алгоритмов»

Контрольная работа №2

Вариант 11

Выполнил:

Студент гр.

________________ /

«____»________________2023г.

Проверил:

_______________ /

«____»________________2023г.

Томск 2023

Содержание

Введение

Контрольная работа №2 по дисциплине «Математическая логика и теория алгоритмов» для практического освоения задач по темам:

1) «операции с множествами»,

2) «отношения»,

3) «отображения»,

4) «эквивалентность и порядок»,

5) «логика высказываний»,

6) «язык логики предикатов»,

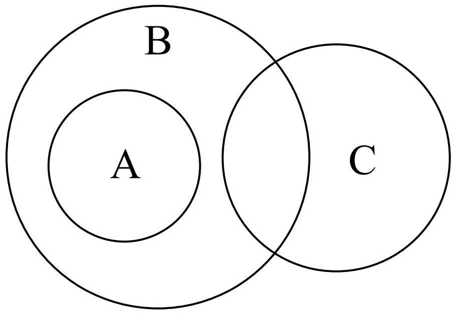
7) «математическая индукция»,

8) «сравнение скорости роста».

Задача №1. Проверить для произвольных множеств, что

$A \subseteq B \cup C \Leftrightarrow A \cap B \subseteq C$

Докажем, что заданная равносильность не выполняется в общем случае. Возьмём множества таким образом, чтобы выполнялось: $A \subseteq B\, и\, A \cap C = \varnothing$. Можно представить множества кругами Эйлера:



Видим, что в этом случае выполняется $A \subseteq B \cup C$, поскольку $A \subseteq B$. С другой стороны, условие $A \cap B \subseteq C$ не выполняется, поскольку $A \cap B = A$ ввиду включения множества $A\, в\, B$ и ввиду того, что множества $A\, и\, C$ не пересекаются ($A \cap C = \varnothing$).

Построим пример:

$A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5\}, C = \{4, 5, 6\}$

В этом случае:

$B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, A \subseteq B \cup C$ *выполняется*

$A \cap B = \{1, 2, 3\}, A \cap B \subseteq C$ *не выполняется*

Таким образом, для произвольных множеств (в общем случае) не выполняется $A \subseteq B \cup C \Leftrightarrow A \cap B \subseteq C$.

Задача №2. Является ли тавтологией формула $((p \wedge q) \supset r)\quad (p \supset (q \supset r))$?

Нам нужно проверить равносильность левой и правой частей формулы. Левая часть формулы: $(p \wedge q) \supset r$. Импликация ложна только в случае, когда из истины следует ложь, поэтому $(p \wedge q) \supset r$ принимает значение “ложь” только в случае, когда $p \wedge q$ принимает значение “истина”, а r - значение “ложь”. Конъюнкция $p \wedge q$ принимает значение “истина” только при истинности $p и q$. Получаем, что $(p \wedge q) \supset r$ принимает значение “ложь” только на одном наборе переменных: $p = И, q = И, r = Л$.

Правая часть формулы: $p \supset (q \supset r)$. Так как импликация ложна только в случае, когда из истины следует ложь, то $p \supset (q \supset r)$ принимает значение “ложь” только в случае, когда p принимает значение “истина”, а $q \supset r$ - значение “ложь”. В свою очередь, $q \supset r$ принимает значение “ложь” только в случае истинности q и ложности r. Получаем, что $p \supset (q \supset r)$ принимает значение “ложь” тоже на одном наборе переменных: $p = И, q = И, r = Л$.

Видим, что обе части заданной формулы принимают значение “ложь” на одних и тех же наборах переменных (в данном случае на одном наборе). Значит, они принимают и значение “истина” на одних и тех же наборах переменных. Следовательно, эти части эквивалентны, и формула $((p \wedge q) \supset r) \quad (p \supset (q \supset r))$ является тавтологией.

Задача №3. Переведите с естественного языка на язык логики предикатов: “*Всякое чётное число, большее 2, есть сумма двух простых чисел*.”

Универсум: N −¿ множество натуральных чисел.

Предикаты:

$P(x) \equiv$ x делится на 2

$Q(x) \equiv$ x больше 2

$R(x) \equiv$ x-простое число

$S(x, y, z) \equiv$ x равно сумме чисел y и z

Формула:

$\forall x \exists y \exists z (P(x) \wedge Q(x) \supset R(y) R(z) \wedge S(x, y, z))$

Задача №4. Переведите с естественного языка на язык логики предикатов: "*Хотя 60 делится на 2, 3, 4, 5 и 6, но это не значит, что 60 делится на любое натуральное число.*"

Вводим два универсальных множества:

$N -¿$ множество натуральных чисел, $M=\{2,3,4,5,6\}$

Предикаты:

$P(x)=\{60 \text{ делится на } x \mid x \in M\}$

$Q(y)=\{60\, делится\, на\, y \mid y \in N\}$

Формула строим в смысловом отношении следующим образом: 60 делится на любое число из множества M, но существует такое натуральное число, на которое число 60 не делится.

$\forall x P(x) \wedge \exists y \neg Q(y)$

Задача №5. Для бинарного отношения $X\rho Y \Leftrightarrow X \cap Y = \varnothing$ ($X\, и\, Y$ - множества из целых чисел) выясните, какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) и какими не обладает.

Не для любого множества из целых чисел X выполняется $X\rho X$: для непустых множеств $X: X \cap X = X \neq \varnothing$. Значит, отношение ρ не является рефлексивным.

Симметричность отношения ρ: из того, что $X \cap Y = \varnothing$ следует $Y \cap X = \varnothing$, т.е. из $X\rho Y$ следует $Y\rho X$. Отношение ρ симметрично.

Отношение ρ не антисимметрично: если $X\rho Y\, и\, Y\rho X$, то отсюда не следует, что $X=Y$. Например, $\{1,2\}\rho\{3,4\}\, и\, \{3,4\}\rho\{1,2\}, но\, \{1,2\} \neq \{3,4\}$.

Отношение ρ не транзитивно: если $X\rho Y\, и\, Y\rho Z$, то отсюда не следует, что $X\rho Z$. Например, $\{1,2\}\rho\{3,4\}\, и\, \{3,4\}\rho\{1,2\}, но\, (\{1,2\},\{1,2\}) \notin \rho$.

Таким образом, отношение ρ является симметричным, но не является рефлексивным, антисимметричным и транзитивным.

Задача №6. Пусть : $f: x \to x^2+1$ и $g: x \to x^3$ - отображения $R \to R$.

Найдите отображения $f \circ g$ и $g \circ f$.

Композиция отображений φ и ψ следующим образом:

$$\varphi \circ \psi(x) = \varphi(\psi(x))$$

Тогда отображения $f \circ g$ и $g \circ f$:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = (x^3)^2 + 1 = x^6 + 1$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = (x^2+1)^3$$

Задача №7. Используя математическую индукцию, докажите для целого $n \geq 1$, что

$$\sum_{k=1}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1$$

Проверим выполнение для базиса индукции $n=1$:

$$1 \times 1! = (1+1)! - 1 : 1 = 2 - 1 - \text{\textit{выполняется}}$$

Проверим справедливость индуктивного перехода: докажем, что из справедливости равенства для n следует выполнение равенства для $n+1$. Пусть для n равенство выполняется:

$$\sum_{k=1}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1$$

Нам нужно доказать выполнение равенства для $n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k \times k! = (n+2)! - 1$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k \times k! = \sum_{k=1}^{n} k \times k! + (n+1) \times (n+1)! = \left[\sum_{k=1}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1 \right] = \text{¿}$$

$$\text{¿}(n+1)! - 1 + (n+1) \times (n+1)! = (n+1)! \times (1+n+1) - 1 = \text{¿}$$

$$\text{¿}(n+1)! \times (n+2) - 1 = (n+2)! - 1$$

Индуктивный переход проверен.

Следовательно, для любого целого $n \geq 1$ выполняется:

$$\sum_{k=1}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1$$

Задача №8. Расположите следующие 5 функций в порядке увеличения скорости роста (каждая функция есть O(следующая)):

$$n/134, \sqrt{n}+n, \frac{n e^n}{1000}, n^2 (lnn)^{1000}, 1+n^2 (100+n)$$

Выполняем следующие действия, не влияющие на порядок расположения функция по возрастанию скорости роста: для функции $n/134$ убираем постоянный множитель $1/134$; для функции $\sqrt{n}+n$ оставляем слагаемое n – с максимальной степенью n; для функции $\frac{n e^n}{1000}$ убираем постоянный множитель $1/1000$; для функции $1+n^2(100+n)=n^3+100n^2+1$ оставляем слагаемое n^3 – с максимальной степенью n. Получаем следующий ряд функций

$$n, n, n e^n, n^2 (lnn)^{1000}, n^3$$

Функцию n учитываем один раз (соответствующие функции $n/134, \sqrt{n}+n$ имеют один порядок скорости роста), далее предположительно выстраиваем функции в следующем порядке (при сравнении $n^2 (lnn)^{1000}, n^3$ считаем, что здесь большая степень n существеннее, чем множитель $(lnn)^{1000}$; а функции $n e^n$ имеет максимальную скорость как показательная, к тому же умноженная на n):

$n\,,\,n^2(lnn)^{1000}\,,\,n^3\,,\,n\,e^n$

Покажем, что порядок именно такой, беря предел отношения функций (текущей к последующей) и убеждаясь, что он равен нулю. При необходимости будем переходить к непрерывному аргументу x и пользоваться правилом Лопиталя.

$$1\text{¿}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2(lnn)^{1000}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(lnn)^{1000}}=\frac{1}{+\infty}=0$$

$$2\text{¿}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(lnn)^{1000}}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{(lnn)^{1000}}{n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(lnx)^{1000}}{x}=\text{¿¿}$$

$$\text{¿}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left((lnx)^{1000}\right)'}{(x)'}=1000\lim_{x\to+\infty}\frac{(lnx)^{999}}{x}=\text{¿}$$

$$\text{¿}1000\lim_{x\to+\infty}\frac{\left((lnx)^{999}\right)'}{(x)'}=1000\cdot999\lim_{x\to+\infty}\frac{(lnx)^{998}}{x}=\ldots$$

$$\ldots=1000!\lim_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x}=[\text{последний раз пользуемся правилом Лопиталя}]=\text{¿}$$

$$\text{¿}1000!\lim_{x\to+\infty}\frac{(lnx)'}{(x)'}=1000!\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{1}=1000!\cdot0=0$$

$$3\text{¿}\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{ne^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{e^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=\text{¿}$$

$$\text{¿}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0$$

Возвращаемся к исходным функциям и располагаем их в порядке увеличения скорости роста:

$\sqrt{n}+n\,и\,\frac{n}{134}(\text{у них одна скорость роста});$

$n^2(lnn)^{1000};\,1+n^2(100+n);\,\frac{ne^n}{1000}$

Заключение

В ходе изучения дисциплины «Математическая логика и теория алгоритмов» был освоен формальный язык математической логики для математических утверждений, базовые понятия теории множеств, а также усвоили теорию и методы математической логики и теории алгоритмов. Благодаря Контрольной работе №2 полученные знания были отработаны на практике.

Список использованной литературы:

1. Зюзьков В.М. Математическая логика и теория алгоритмов: учебное методическое пособие. — Томск: Факультет дистанционного обучения, ТУСУР, 2015. — 80 с.
2. Зюзьков В.М. Математическая логика и теория алгоритмов: учебное пособие. — Томск : Эль Контент, 2015. — 236 с.